

Essential Skills Mathematics

Studiewijzer

MODULE 7

FUNCTIES OPSTELLEN

0 Leerdoelen en onderwerpen

Leerdoelen

Na deze module bestudeerd te hebben moet je:

- Uit de grafiek van een rechte lijn de algebraïsche vergelijking van die rechte lijn kunnen bepalen.
- Uit gegevens van een kwadratische functie de vergelijking van die kwadratische functie kunnen opstellen
- Uit een aantal gegeven wortelfuncties die wortelfunctie kunnen kiezen die hoort bij een gegeven grafiek. En ook na een vermenigvuldiging t.o.v. de y-as, een spiegeling t.o.v. de y-as en een spiegeling t.o.v. de x-as opnieuw het functievoorschrift van de gemanipuleerde wortelfunctie kunnen bepalen.
- Weten welke grafiek bij een gegeven exponentiële functie hoort.
- Weten welke grafiek bij een gegeven logaritmische functie hoort.

Onderwerpen

7.1 Het bepalen van de vergelijking van een rechte lijn aan de hand van de grafiek van die rechte lijn.

7.2 Het bepalen van de vergelijking van een kwadratische functie m.b.v. gegevens van die functie.

7.3 Bij een gegeven grafiek de juiste wortelfunctie kiezen uit een gegeven aantal wortelfuncties. Het effect van een vermenigvuldiging t.o.v. de y-as, een spiegeling t.o.v. de y-as en een spiegeling t.o.v. de x-as op het functievoorschrift van een wortelfunctie kunnen berekenen.

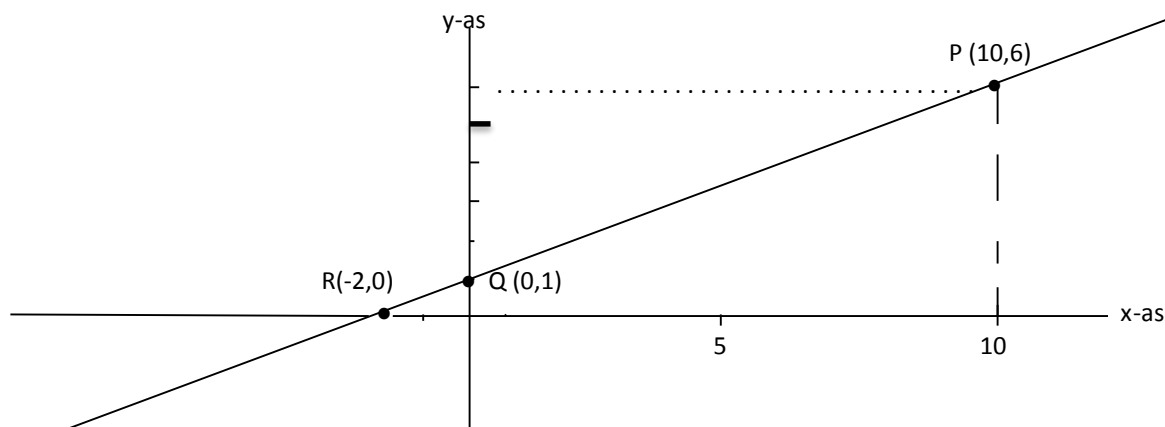
7.4 Bij een functievoorschrift van een exponentiële functie de juiste grafiek vinden.

7.5 Bij een functievoorschrift van een logaritmische functie de juiste grafiek vinden.

7.1 De bepaling van de vergelijking van een rechte lijn uit een grafiek

In dit eerste onderdeel van module 7 worden twee methoden behandeld om uit de grafiek van een rechte lijn de bijbehorende algebraïsche vergelijking van die rechte lijn te bepalen.

We beginnen met een concreet voorbeeld van een grafiek van een rechte lijn. Zie onderstaande grafiek :



In eerste instantie zien we een *rechthoekig* assenkruis: de horizontale lijn wordt de x-as genoemd en de verticale lijn de y-as. Door het aanbrengen van deze twee loodrechte lijnen, het z.g. cartesische assenstelsel, kan de **positie** van ieder willekeurig punt in het platte vlak vastgelegd worden en wel door **twee getallen**: de **x-coördinaat** en de **y-coördinaat**.

Bekijk b.v. eens het punt P in de bovenstaande grafiek. De positie van punt P kan gevonden worden door allereerst vanuit de oorsprong 10 eenheden naar rechts te gaan (dan heb je het punt $x = 10$ op de x-as bereikt). Men zegt dan dat P een x-coördinaat ter waarde 10 heeft. Dan 6 eenheden omhoog; men zegt dan dat P de y-coördinaat 6 heeft. Je kan ook eerst vanuit de oorsprong 6 omhoog gaan en daarna 10 naar rechts. Dan kom je toch op hetzelfde punt P uit. Dat de x-coördinaat gelijk is aan 10 en de y-coördinaat gelijk is aan 6 wordt op de volgende wijze genoteerd :

$$P (10,6)$$

Het 1^{ste} getal tussen haakjes stelt de x-coördinaat voor en het 2^{de} getal de y-coördinaat. We zien verder dat het punt P op een *rechte* lijn ligt. Deze rechte gaat behalve door P(10,6) ook b.v. door Q(0,1) en R(-2,0). Het punt R is het snijpunt van de rechte met de x-as en punt Q is het snijpunt van de rechte met de y-as. In feite kan men deze rechte opvatten als een *oneindige verzameling* van punten. Wat hebben deze punten nu gemeenschappelijk? Helder is dat alle punten een x-coördinaat en y-coördinaat hebben. Wat de punten op deze rechte lijn nu gemeenschappelijk hebben is dat voor al deze punten dezelfde relatie tussen de x-waarde en y-waarde bestaat, namelijk:

Indien je de x-coördinaat door 2 deelt en je telt er daarna 1 bij op, dan krijg je de y-coördinaat.

Gebruik je de letter y voor de y-coördinaat en de letter x voor de x-coördinaat, dan geldt dus :

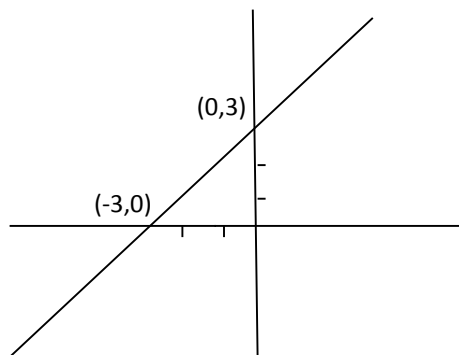
$$y = (1/2)x + 1$$

De bovenstaande uitdrukking wordt de **(algebraïsche) vergelijking** van de rechte lijn genoemd. Het woord vergelijking is geen slecht woord: van ieder punt wordt y vergeleken met $(1/2)x + 1$ en telkens blijken dan y en

$(1/2)x + 1$ gelijk aan elkaar te zijn. Je ziet hier het grote voordeel van het gebruik van letters: **je hebt nu oneindig veel punten van deze rechte lijn in slechts één enkele vergelijking samengevat.**

Na deze inleiding nu terug naar enkele illustratieve voorbeelden. We moeten telkens bij een gegeven grafiek van een rechte lijn de *vergelijking* van deze rechte lijn trachten te vinden.

Voorbeeld 1: Gegeven de onderstaande grafiek van een rechte lijn:



Het eerste wat onmiddellijk opvalt is, dat de rechte lijn gaat door de punten $(0,3)$ (snijpunt met y-as) en door het punt $(-3,0)$ (snijpunt met x-as). Er zijn meerdere methoden beschikbaar om de vergelijking van een rechte te bepalen. We beperken ons tot twee methoden gegeven.

Methode 1: Substitutie van de coördinaten van twee punten in de algemene vergelijking van de rechte lijn.

We zien dat de twee punten $(0,3)$ en $(-3,0)$ zich op de gezochte rechte lijn bevinden. Zoals gebruikelijk stellen de vergelijking van deze rechte lijn dan gelijk aan:

$$y = ax + b \quad (1)$$

Het punt $(-3,0)$ ligt op de lijn, voldoet dus aan $y = ax + b$, dus: $0 = -3a + b$ (2)

Het punt $(0,3)$ ligt ook op de rechte lijn, dus: $3 = 0 \cdot a + b$ (3)

Uit vergelijking (3) is onmiddellijk b te bepalen, namelijk $b = 3$. Vergelijking (2) stelt dat $0 = -3a + b$. Brengen we de term $-3a$ naar de linkerkant, dan wordt deze term $+3a$ (van teken verwisselen als je een term naar de andere zijde van de vergelijking brengt) en dan krijgen we $b = 3a$. Met $b=3$ wordt dit: $3 = 3a \rightarrow 3a = 3 \rightarrow a = 1$.

Substitueren we tenslotte $a = 1$ en $b = 3$ in vergelijking (1) dan vinden we de vergelijking van de rechte lijn:

$y = x + 3$	vergelijking (4)
-------------	-------------------------

Methode 2: De bepaling van de waarden voor a en b rechtstreeks uit de grafiek.

(i) De bepaling van a .

De bepaling van a gaat in drie stappen:

stap 1: Je beweegt je op de x-as een stukje naar rechts, bijvoorbeeld vanaf het punt $(-3,0)$ naar de oorsprong $(0,0)$. Je moet dit een beetje handig kiezen. Indien je beweegt van $(-3,0)$ naar $(0,0)$ dan is de *verandering* in de x-coördinaat *positief* en gelijk aan $+3$. Dit wordt genoteerd als: $\Delta x = +3$. Hierin is Δ het symbool voor "verandering".

stap 2: Als x van -3 naar 0 loopt, dan verandert de bijbehorende y -waarde van de rechte lijn: de y -waarde *neemt toe* van 0 tot 3 , dus de *verandering* in y is $+3$ ofwel $\Delta y = +3$.

stap 3: Je kan nu a bepalen met behulp van de formule :

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{3} = 1 \quad (5)$$

(ii) De bepaling van b.

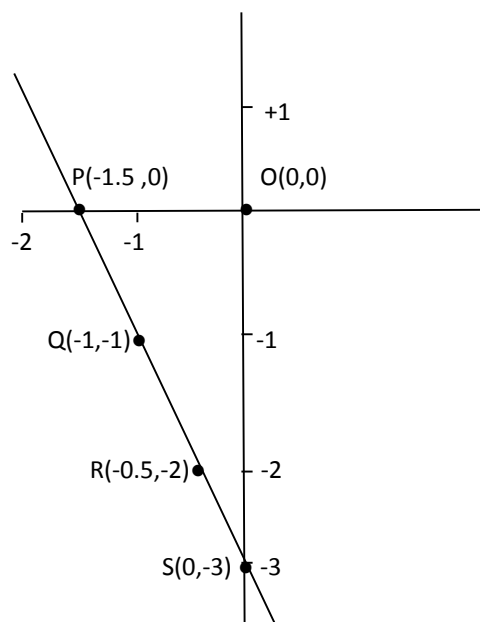
De constante b wordt de *asafsnede* genoemd en is gelijk aan de lengte van het lijnstuk dat loopt van de oorsprong O(0,0) tot het snijpunt van de rechte lijn met de Y-as. Ligt het snijpunt boven de oorsprong, d.w.z. op het positieve gedeelte van de y-as, dan wordt b positief gerekend. Ligt echter dit snijpunt onder de x-as, d.w.z. op het negatieve gedeelte van de y-as, dan wordt b negatief gerekend. Gaat de rechte lijn door de oorsprong, dan is uiteraard b gelijk aan nul want het snijpunt met de y-as valt dan samen met de oorsprong.

In ons geval is het snijpunt met de y-as het punt (0,3) , dit punt ligt op het positieve deel van de y-as , dus b is positief en gelijk aan de afstand tussen (0,0) en (0,3) en deze afstand is gelijk aan 3. Conclusie: **b = 3**.

De vergelijking van de rechte lijn is nu gevonden. Je substitueert n.l. de gevonden waarden voor a en b , dus a=1 en b = 3, in de algemene vergelijking $y = ax + b$ en dan is het eindresultaat :

$$y = x + 3 \quad (6)$$

Voorbeeld 2: Zie onderstaande grafiek :



In dit tweede voorbeeld is een *dalende* rechte lijn te zien (in het eerste voorbeeld was het een stijgende rechte lijn). Je moet altijd proberen wat in het oog springende punten te zoeken en daarvan de coördinaten te bepalen. Hier, in dit geval, zijn in het oog springende punten het punt P(-1.5,0), dat is snijpunt met de x-as, en ook nog het snijpunt met de y-as, het punt S(0,-3) . Ook valt het punt Q(-1,1) op. We nemen ook nog het punt R(-0.5,-2) in beschouwing.

Methode 1: we beginnen weer met de eerste methode, dus we substitueren de coördinaten van twee geschikte punten in de algemene vergelijking van de rechte lijn. We kunnen de punten P en Q kiezen, of P en R , of Q en R , enz. , dat maakt niet zoveel uit. Stel je neemt de punten Q en R . Dan moeten we de coördinaten van deze twee punten in de algemene vergelijking (1) van de rechte lijn substitueren. Dan dus:

$$Q(-1,-1) \text{ op } y = ax + b \rightarrow -1 = -a + b \quad (7)$$

$$R(-0.5,-2) \text{ op } y = ax + b \rightarrow -2 = -0.5a + b \quad (8)$$

De bovenstaande vergelijkingen (7) en (8) worden *een stelsel van twee lineaire vergelijkingen met twee onbekenden genoemd*. Er

worden twee manieren besproken om a en b uit (7) en (8) te berekenen.

De eerste methode wordt de **substitutiemethode** genoemd en gaat als volgt: ga in vergelijking (7) de term $-a$ naar het linkerlid brengen ($-a$ wordt dan $+a$) en breng de term -1 naar de rechterzijde van de vergelijking (-1 wordt dan $+1$). Dan gaat vergelijking (7) over in : $a = b + 1$. En deze uitdrukking voor **a** *substitueren* (vandaar de naam substitutiemethode) in vergelijking (8). Het resultaat wordt:

$$-2 = -0.5(b + 1) + b$$

Dan eerst de haakjes wegwerken: $-2 = -0.5b - 0.5 + b \rightarrow -2 = 0.5b - 0.5 \rightarrow 0.5b = -1.5 \rightarrow$ Vermenigvuldig beide zijden met 2. Het resultaat wordt: $b = -3$. En dan weet je ook a, want $a = b + 1$, dus $a = -3 + 1 = -2$. De vergelijking van de rechte lijn is dus :

$$y = -2x - 3 \quad (9)$$

Methode 2: De bepaling van de waarden van a en b rechtstreeks uit de grafiek (zie ook voorbeeld 1).

(i) De bepaling van a.

Zoals reeds getoond bij voorbeeld 1 gaat de bepaling van a gaat in drie stappen:

stap 1 : Je beweegt je weer op de x-as een stukje naar rechts, bijvoorbeeld vanaf het punt P(-1.5,0) naar de oorsprong (0,0). Indien je beweegt van (-1.5,0) naar (0,0) dan is de *verandering* in de x-coördinaat positief, want x neemt toe, en is gelijk aan 1.5. Deze verandering wordt wederom genoteerd als : $\Delta x = 1.5$.

stap 2: Als x toeneemt van -1.5 tot 0, dan verandert de bijbehorende y-waarde van de rechte lijn: de y-waarde daalt van 0 tot -3, dus de *verandering* in y is -3, d.w.z. $\Delta y = -3$.

stap 3: Je bepaalt weer a via de formule :

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-3}{1.5} = -2 \quad (10)$$

(ii) De bepaling van b.

De constante b, de *asafsnede*, is de afstand tussen de oorsprong en het snijpunt met de y-as. Lig dit snijpunt met de y-as onder de x-as, dan wordt deze afstand negatief gerekend. Dat is hier het geval, dus **b = -3**.

De vergelijking van de rechte is dan weer gevonden. Je substitueert de gevonden waarden voor a en b, n.l. $a = -2$ en $b = -3$ in de algemene vergelijking $y = ax + b$ en dan vind je :

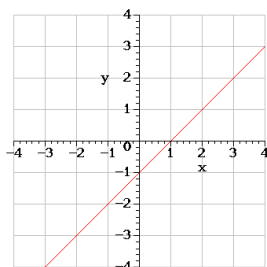
$$y = -2x - 3 \quad (11)$$

Zoals verwacht mag worden, is vgl (11) volkomen identiek met vergelijking (9).

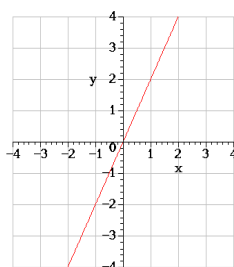
Voor de coëfficiënt a worden verschillende namen gebruikt b.v. **richtingscoëfficiënt** of **hellingsgetal**. Er worden ook nog wel eens andere namen gebruikt (b.v. richtingsgetal), maar deze eerstgenoemde twee namen worden het meest gebruikt.

Opgave 1 : Bepaal de vergelijkingen van de rechte lijnen in de onderstaande vier grafieken.

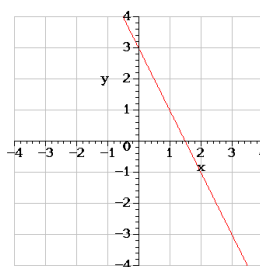
Opgave 1a



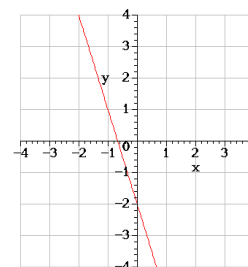
Opgave 1b :



Opgave 1c :



Opgave 1d :



7.2 Het opstellen van een kwadratische functie

In dit onderdeel van module 7 wordt uitgelegd hoe je een kwadratische vergelijking kunt opstellen aan de hand van gegevens van een bepaalde kwadratische (= tweedegraads) functie. Omdat het een kwadratische functie betreft, is de grafiek van deze functie een **parabool**. Naar de aard van de gegevens kunnen drie typen vraagstukken onderscheiden worden. Deze drie typen gegevens zijn:

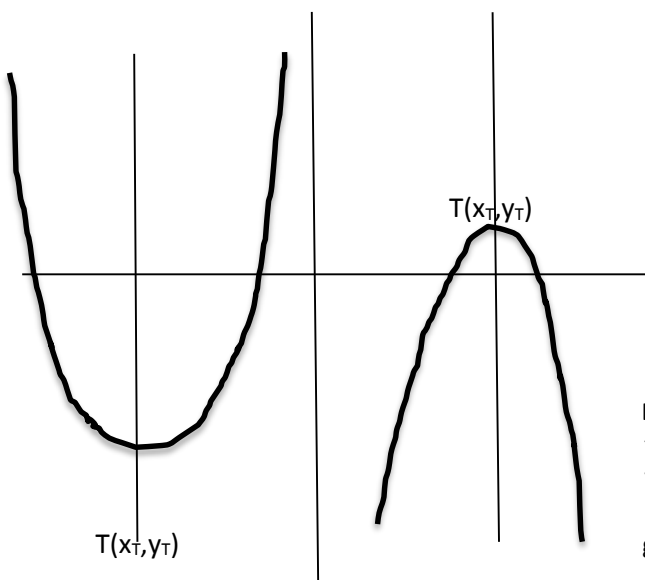
Type 1: Van de parabool worden de **coördinaten van de top** (kan een maximum of een minimum zijn) gegeven en ook worden nog de **coördinaten van een ander punt** gegeven, dat ook op de parabool ligt. Om dit type vraagstuk op te lossen wordt een speciale vorm van de bijbehorende algebraïsche vergelijking gepresenteerd.

Type 2: Van de parabool worden de **snijpunten met de x-as** gegeven. Bovendien wordt ook nog de **y-coördinaat van de top** gegeven. Ook bij type vraagstuk is het handig om een speciale vorm van de bijbehorende algebraïsche vergelijking te gebruiken.

Type 3: In dit type vraagstuk wordt de algebraïsche vergelijking van een parabool gegeven en daarna wordt **de grafiek van deze parabool ten opzichte van de y-as met een bepaald getal vermenigvuldigd**. De parabool wordt dan smaller of breder. Het is dan de bedoeling uit een gegeven algebraïsche vergelijking een nieuwe algebraïsche vergelijking af te leiden. De techniek, die je hiervoor moet gebruiken, wordt uit de doeken gedaan.

Deze drie typen worden nu achtereenvolgens besproken.

Type 1: In dit type worden de coördinaten x_T en y_T van de top $T(x_T, y_T)$ gegeven. Deze top T kan dan een maximum of een minimum zijn. Zie het figuur links, waarin twee voorbeelden van parabolen gegeven zijn. Bij de meest linkse parabool is de top een *minimum* en bij parabool rechts daarvan is de top een *maximum*. De linkerparabool wordt om voor de hand liggende redenen een *dalparabool* genoemd, de rechterparabool wordt een *bergparabool* genoemd. In het algemeen luidt de vergelijking van een parabool met een symmetrieas *evenwijdig aan de y-as* als volgt:



$$y = ax^2 + bx + c \quad (19)$$

Dat verklaart ook meteen de naam kwadratische of tweedegraadsfunctie: de hoogste macht van een vergelijking wordt de *graad* van de vergelijking genoemd en de hoogste macht in bovenstaande vergelijking is 2, vandaar de benaming *tweedegraadsfunctie*.

Bovenstaande vergelijking (19) kan gemakkelijk iets anders geschreven worden en wel in een zodanige vorm dat de vraagstukken van type1 er snel mee opgelost kunnen worden. Deze andere schrijfwijze is:

$$y = A(x - x_T)^2 + y_T \quad (20)$$

Aan deze vergelijking is te zien dat de functie, de parabool, *symmetrisch* is ten opzichte van $x = x_T$. Ga je een stukje links van x_T zitten en daarna datzelfde stukje rechts van x_T , dan zal je dezelfde y-waarde vinden. Daarom wordt $x = x_T$ de *symmetrieas* van de parabool genoemd.

Je kan verder zien dat als $x = x_T$, dan is $y = y_T$ dus de top bevindt zich op de symmetrieas. Indien $A > 0$, dan vormt de top een *minimum* en hebben we te maken met een *dalparabool*. Is echter $A < 0$, dan is er sprake van een *bergparabool* en is de top een *maximum*.

Tenslotte zij opgemerkt dat de coëfficiënt A in vergelijking (20) een constante is. Hoe groter A hoe smaller de parabool, hoe kleiner A , hoe breder de parabool. Bij de vraagstukken van type 1 worden altijd de coördinaten van een extra punt op de parabool gegeven. Met die extra informatie kan dan deze constante A bepaald worden.

Als illustratie van het voorgaande een voorbeeld van een type 1 vraagstuk :

Stel de vergelijking op van de kwadratische functie waarvan de grafiek een top heeft in $(-3,0)$ en die tevens door het punt $(-2,-4)$ gaat.

De benodigde vergelijking is, zoals uitgelegd: $y = A(x - x_T)^2 + y_T$. We substitueren de coördinaten van de top in deze vergelijking, dus $x_T = -3$ en $y_T = 0$ invullen. Dat geeft als resultaat: $y = A(x - (-3))^2 + 0$, ofwel $y = A(x+3)^2$.

Resteert nog de constante A te bepalen. Die wordt gevonden door de coördinaten van het punt $(-2,-4)$ in de vergelijking $y = A(x+3)^2$ te substitueren. Dan : $-4 = A(-2+3)^2$. Dus $A = -4$. De gezochte vergelijking van de parabool is dan:

$$y = -4(x + 3)^2 \quad (21)$$

Als je in resultaat (21) het kwadraat uitrekenet en alles netjes vereenvoudigt, dan wordt vergelijking (21) gelijk aan :

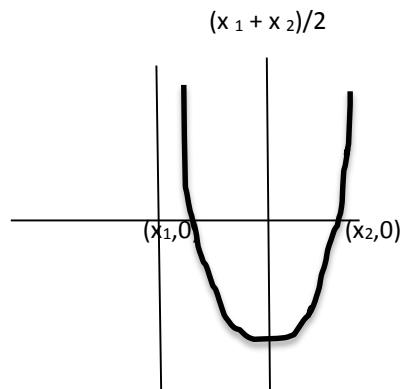
$$y = -4x^2 - 24x - 36$$

Opgave 8 : Stel de algebraïsche vergelijking op van de kwadratische functie waarvan de grafiek een top heeft in $(4,8)$ en die tevens door het punt $(2,0)$ gaat.

Type 2: Zie de figuur rechts. In dit type vraagstuk worden de snijpunten van de parabool met de x-as gegeven. Bovendien wordt dan ook nog de y-coördinaat van de top gegeven.

Laten we coördinaten van de snijpunten met de x-as aanduiden met x_1 en x_2 . Dus de snijpunten met de x-as zijn de punten $(x_1, 0)$ en $(x_2, 0)$.

De y-coördinaat van de top noemen we y_T en de x-coördinaat van de top weten we ook want de top ligt op de symmetrieas van de parabool en deze symmetrieas bevindt zich *precies halverwege de beide nulpunten*, dus de x-coördinaat van de symmetrieas en dus van de top is : $(x_1 + x_2)/2$.



Uit vergelijking (19) is vrij snel af te leiden dat de vergelijking van de parabool met snijpunten x_1 en x_2 met de x-as als volgt geschreven kan worden:

$$y = A(x - x_1)(x - x_2) \quad (22)$$

Formule (22) toont duidelijk aan dat y gelijk wordt aan nul als $x = x_1$ of $x = x_2$. Het is alleen mogelijk om de vergelijking van de parabool in de vorm van formule (22) te schrijven indien de parabool de x-as raakt (dan is $x_1 =$

x_2) of de x-as in twee verschillende punten snijdt. De constante A is weer bepalend voor de breedte van de parabool: hoe kleiner A, hoe breder de parabool en hoe groter A, hoe smaller de parabool. Een voorbeeld :

Bepaal de vergelijking van de parabool indien de parabool de x-as snijdt in $x = 3$ en $x = -6$ en als verder nog gegeven is dat de top op de lijn $y = -10$ ligt.

De vergelijking van een parabool met nulpunten x_1 en x_2 is: $y = A(x - x_1)(x - x_2)$. Nu is $x_1 = -6$ en $x_2 = 3$, dus de paraboolvergelijking wordt: $y = A(x - (-6))(x - 3)$ ofwel $y = A(x + 6)(x - 3)$.

De top van de parabool ligt qua x-waarde precies in het midden tussen x_1 en x_2 , dus $x_T = (x_1 + x_2)/2$. In ons geval wordt dat : $x_T = (-6 + 3)/2 = -1.5$. En de y-coördinaat van de top is natuurlijk -10, want de top ligt, zoals gegeven, op de horizontale lijn $y = -10$. Dus de top T wordt gegeven door: $T(-1.5, -10)$.

We substitueren nu de coördinaten van de top in $y = A(x+6)(x-3)$ en krijgen: $-10 = A(-1.5 + 6)(-1.5 - 3)$ ofwel $-10 = A \cdot 4.5 \cdot -4.5 \rightarrow -10 = A(9/2)(-9/2) \rightarrow -10 = (-81/4)A \rightarrow A = (4/81) \cdot (10) = 40/81$. De vergelijking wordt:

$$y = (40/81)(x - 3)(x + 6) = (40/81)x^2 + (120/81)x - (720/81) \quad (23)$$

Je kan trouwens dit vraagstuk ook oplossen met behulp van de vergelijking van de parabool die gebruikt is bij het oplossen van type 1 problemen, n.l. $y = A(x - x_T)^2 + y_T$. Want $x_T = (x_1 + x_2)/2 = (-6+3)/2 = -1.5$ en $y_T = -10$.

Substitutie van deze coördinaten in $y = A(x - x_T)^2 + y_T$ geeft: $y = A(x + 1.5)^2 - 10$. En dan kan je één van de nulpunten $(-6,0)$ of $(3,0)$ gebruiken om de constante A te berekenen. Gebruiken we $(3,0)$ dan wordt het resultaat: $0 = A(3 + 1.5)^2 - 10 \rightarrow (4.5)^2 A = 10 \rightarrow A = 40/81$. En dan wordt het uiteindelijke resultaat :

$$y = (40/81)(x+1.5)^2 - 10 = (40/81)x^2 + (120/81)x - (720/81) \quad (24)$$

Opgave 9 : Bepaal de vergelijking van de parabool indien de parabool de x-as snijdt in $x = -4$ en $x = 4$ en waarvan de top ligt op de lijn $y = 80$.

Type 3: In dit type vraagstuk moet je de grafiek van de parabool " **ten opzichte van de y-as met een bepaald getal vermenigvuldigen**". De parabool krijgt dan een nieuwe vergelijking en deze nieuwe vergelijking moet berekend worden.

Eerst eens kijken wat met de uitdrukking " *vermenigvuldigen met een bepaald getal ten opzichte van de y-as*" bedoeld wordt. Elk punt P van een grafiek van een functie heeft een bepaalde afstand tot de y-as. Zeggen we nu dat de grafiek ten opzichte van de y-as met 5 vermenigvuldigd moet worden, dan bedoelen we te zeggen dat ieder punt P van de grafiek 5 maal verder van de Y-as moet komen te liggen. En dat kan je bereiken door overal waar x in de formule voorkomt, x te vervangen door $x/5$. En dat is ook logisch, zie onderstaand voorbeeld.

Voorbeeld 1: We starten met de parabool $y = x^2$.

We willen deze parabool nu *4 maal zo breed* maken ten opzichte van de y-as. Dan moet je in de formule de variabele x vervangen door $x/4$.

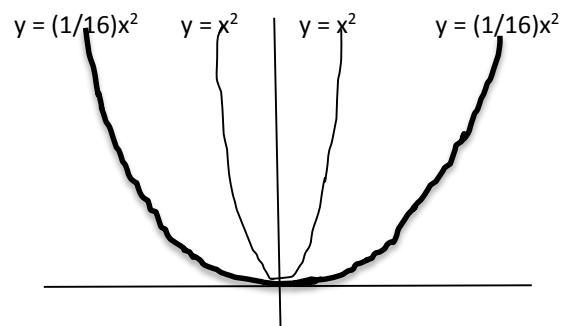
We krijgen dan de volgende overgang:

$$y = x^2 \rightarrow y = (x/4)^2 = (1/16)x^2$$

Een controle: voor $x = 1$ wordt $y = x^2 = 1^2 = 1$.

Voor $x = 4$ wordt $y = (1/16)x^2 = (1/16)4^2 = (1/16)16 = 1$.

Het klopt dus: dezelfde y-waarde wordt voor een vier maal grotere x-waarde bereikt, dus de grafiek is t.o.v. de y-as 4 maal zo breed geworden.



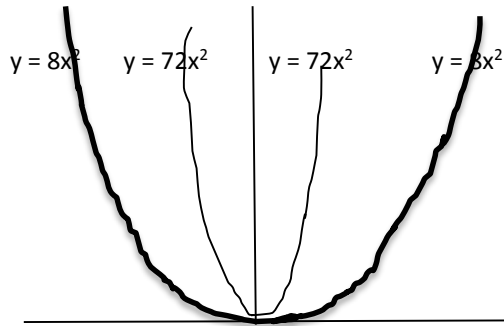
Voorbeeld 2: Gegeven de parabool $y = 8x^2$.

We willen deze parabool nu 3 *maal zo smal* maken ten opzichte van de y-as. Dan moet je in de formule x vervangen door 3x. We krijgen dan de volgende overgang :

$$y = 8x^2 \rightarrow y = 8(3x)^2 = 72x^2$$

Even controleren: voor $x = 3$ wordt $y = 8x^2 = 8 \cdot 3 \cdot 3 = 72$.

En voor $x = 1$ wordt de gemanipuleerde functie $y = 72x^2$ ook gelijk aan $y = 72 \cdot 1^2 = 72$. Dezelfde y-waarde wordt voor een driemaal zo kleine x-waarde bereikt, dus de grafiek is t.o.v. de y-as drie maal smaller geworden..



Opgave 10 : Gegeven is de functie van de parabool $y = x^2 - 2x - 1$. Vermenigvuldig de grafiek ten opzichte van de y-as met $1/3$ (deze parabool wordt dan 3 maal zo slank en alle punten komen dichterbij de y-as te liggen). Wat is dan de nieuwe functie?

Opgave 11 : Gegeven is de functie van de parabool $y = 25x^2 - 10x - 1$. Vermenigvuldig de grafiek ten opzichte van de y-as met 5 (deze parabool wordt dan 5 maal zo breed en alle punten komen verder van de y-as te liggen). Wat is dan de nieuwe functie?

7.3 Het opstellen van een wortelfunctie

In dit onderdeel van module 7 krijg je een grafiek te zien van een wortelfunctie, waarbij dan drie algebraïsche vergelijkingen gegeven zijn. Je moet dan door een logisch redenering tot de juiste keuze uit de drie gegeven functievergelijkingen komen. Even een korte inleiding. Enkele voorbeelden van wortelfuncties zijn :

$$y = 5 + 4\sqrt{2x-5} \quad \text{of} \quad y = \sqrt{x+5} \quad \text{of} \quad y = 2 + \sqrt{-2x+13} \quad \text{of} \quad y = 4 + \sqrt{-3x+10}$$

In deze wortelfuncties zie je een *wortel* optreden. Kijk voorbeeld 1. Neem b.v. voor x de waarde 15. Dan wordt $2x - 5$ gelijk aan $2 \cdot 15 - 5 = 25$ **en de wortel uit 25 is 5**. De wortel (in dit geval 5) is dus een getal dat met zichzelf vermenigvuldigd het getal onder het wortelteken oplevert: $5 \cdot 5 = 25$. Je kan slechts de wortel trekken uit een *positief* getal, want een wortel uit een negatief getal bestaat niet. Want zou die wortel negatief zijn, dan kom je na kwadrateren op een positief getal uit en hetzelfde geldt voor een positieve wortel: kwadrateer je die, dan kom je natuurlijk op een positief getal uit. Conclusie: wat je ook neemt, je komt na kwadrateren nooit op een negatief getal uit. Dat heeft dan de volgende consequentie:

Voor de eerste wortelfunctie moet gelden : $2x - 5 \geq 0$, dus de functie bestaat voor $x \geq 2,5$

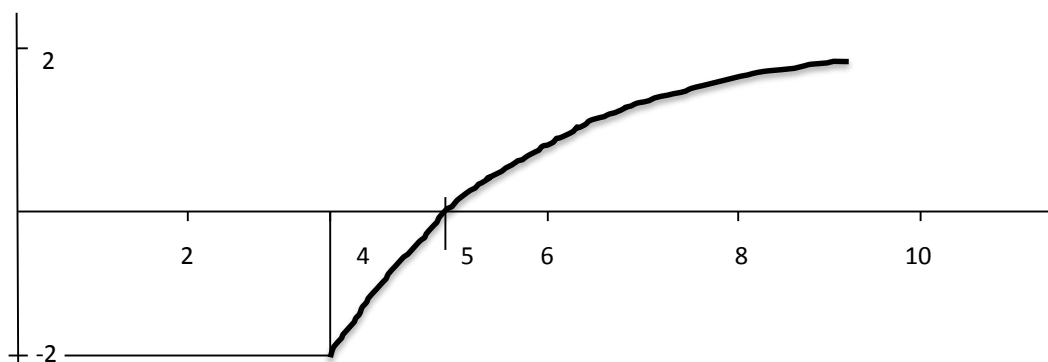
Voor de tweede wortelfunctie moet gelden : $x + 5 \geq 0$, dus de functie bestaat voor $x \geq -5$

Voor de derde wortelfunctie moet gelden : $-2x - 13 \geq 0$, ofwel $2x \leq -13$ ofwel $x \leq -6,5$

Voor de vierde wortelfunctie moet gelden : $-3x + 10 \geq 0$, ofwel $3x \leq 10$ ofwel $x \leq 10/3 = 3(1/3)$

We gaan nu een paar voorbeelden uitwerken :

Voorbeeld 1: Gegeven de grafiek van de functie $g(x)$. Welke functie is in de onderstaande grafiek afgebeeld ?



De drie erbij gegeven functievoorschriften zijn:

- $g(x) = 2 + 2\sqrt{x-4}$ (mogelijkheid A)
- $g(x) = -2 - 2\sqrt{x+4}$ (mogelijkheid B)
- $g(x) = -2 + 2\sqrt{x-4}$ (mogelijkheid C)

Hoe tot de juiste keuze te komen ? Een manier om tot een juiste keuze te komen is **om een geschikte waarde voor x** in de 3 functies te substitueren. Je ziet in de grafiek hierboven dat de functie voor $x = 5$ door de x -as gaat. Dus $x = 5$ in de functie moet $g(x) = 0$ geven. We substitueren daarom $x = 5$ in de drie mogelijkheden A, B en C.

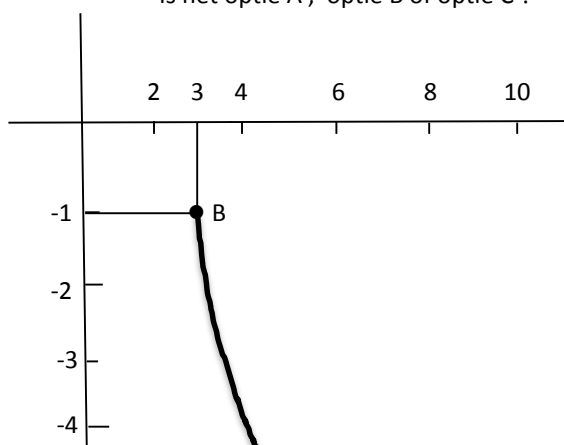
Mogelijkheid A: $g(x) = 2 + \sqrt{5-4} = 2 + 1 = 3$. Dat klopt dus niet, want er moet 0 uitkomen.

Mogelijkheid B : $g(x) = -2 - 2\sqrt{5+4} = -2 - 2 \cdot 3 = -8$. Klopt ook niet. Dan moet het mogelijkheid C zijn:

Mogelijkheid C : $g(x) = -2 + 2\sqrt{5-4} = -2 + 2 \cdot 1 = 0$ En dat klopt: $g(x) = 0$ voor $x = 5$.

Je kan ook $x = 4$ nemen. Dan geldt $g(x) = -2$. Ook een geschikt punt is $x = 8$. Dan moet je krijgen $g(x) = 2$. Je kan trouwens zien dat het mogelijkheid B afvalt want de functie genoemd bij mogelijkheid B bestaat voor $x \geq -4$ (getal onder wortelteken ≥ 0). Dus voor $x \geq -4$ zou je een grafiek voor mogelijkheid B moeten zien, maar die is er niet.

Voorbeeld 2: Gegeven de grafiek van de functie $f(x)$. Welke functie is in de onderstaande grafiek afgebeeld ? Is het optie A , optie B of optie C ?



• $f(x) = -1 - \sqrt{2x-6}$ (optie A)

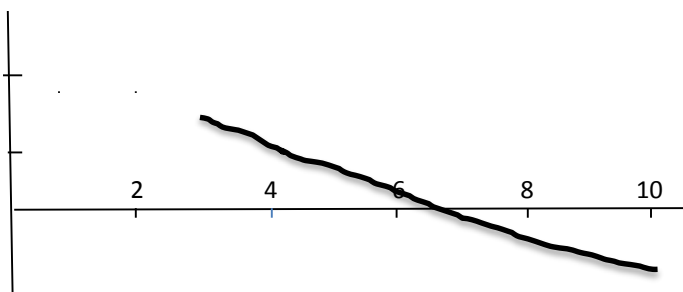
• $f(x) = 1 + \sqrt{2x-6}$ (optie B)

• $f(x) = -1 - \sqrt{2x+6}$ (optie C)

De beide opties A en B zijn gedefiniëerd voor $2x - 6 \geq 0$ dus voor $x \geq 3$, terwijl optie C gedefiniëerd is voor $2x + 6 \geq 0$, dus voor $x \geq -3$. Dat betekent dat optie C onmiddellijk afvalt (er is geen grafiek aanwezig op het

interval $x \geq -3$). We moeten dus kiezen tussen optie A en optie B. Een x-waarde die onmiddellijk opvalt, is de x-waarde van het beginpunt B, namelijk $x = 3$. We zien dat dan $y = -1$. Vullen we $x = 3$ in in optie A, dan krijgen we: $f(x) = -1 - \sqrt{2 \cdot 3 - 6} = -1 - 0 = -1$. Optie A is dus de juiste functie. We kijken nog even voor de zekerheid naar optie B: voor $x = 3$ is dan $f(x) = 1 + \sqrt{2 \cdot 3 - 6} = 1$. Dus optie B vervalt.

opgave 12 : Welke functie is in de onderstaande grafiek afgebeeld ? Is het optie A , optie B of optie C ?



• $h(x) = 3 - \sqrt{2x+6}$ (optie A)

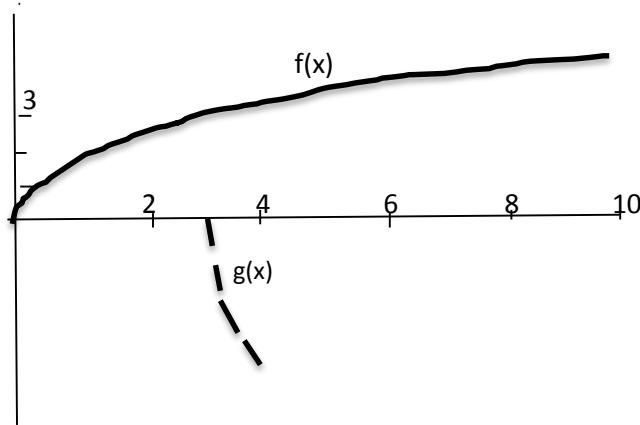
• $h(x) = 3 - \sqrt{2x-6}$ (optie B)

• $h(x) = -3 + \sqrt{2x-6}$ (optie C)

Er komt in dit onderdeel van module 7 nog een ander type vraagstuk voor: er wordt een bepaalde functie gegeven en dan worden een aantal manipulaties, in wisselende volgorde, op die functie uitgeoefend. Uiteindelijk verkrijgt je dan een nieuwe grafiek en daarvan moet de functie bepaald worden. De voornoemde manipulaties kunnen zijn :

- (1) De functie moet t.o.v. de y-as *smaller* of *breder* gemaakt worden.
- (2) De functie moet een aantal eenheden naar links of naar rechts *verschoven* worden.
- (3) De functie moet *gespiegeld* worden t.o.v. de x-as.
- (4) De functie moet *gespiegeld* worden t.o.v. de y-as.

Voorbeeld 1: Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = \sqrt{x}$ (zwarte lijn) en de verplaatste, de gemanipuleerde functie (de gestippelde lijn). Zie onderstaande grafiek. Bepaal de vergelijking van de gestippelde functie $g(x)$, die uit de grafiek van $f(x)$ ontstaat door de grafiek van $f(x)$ als volgt te manipuleren :



- (a) maak allereerst de grafiek van $f(x)$ ten opzichte van de y-as 5 x zo smal.
- (b) verplaats de nieuw ontstane functie dan 3 eenheden naar rechts.
- (c) Tot slot een spiegeling t.o.v. de Y-as.

Oplossing : Zoals getoond in het vorige onderdeel van module 7, n.l. het opstellen van de vergelijking van een kwadratische functie, moet je indien de de grafiek 5 x zo smal gemaakt moet worden, de variabele x overal vervangen worden door $5x$. Dus de functie \sqrt{x} gaat dan over in de functie $\sqrt{5x}$. Dan verplaats je de nieuwe functie 3 eenheden naar rechts. En dan de onderstaande regel toepassen:

Een grafiek k eenheden naar rechts verplaatsen \rightarrow vervang dan x door $(x - k)$
 Een grafiek k eenheden naar links verplaatsen \rightarrow vervang dan x door $(x + k)$

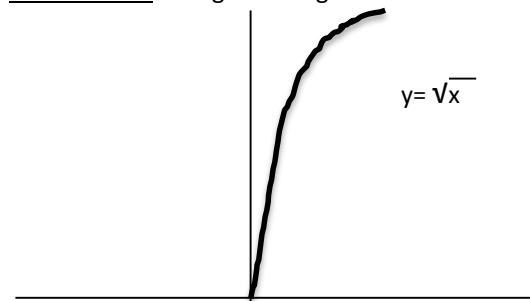
Deze regel toepassend met een verplaatsing van 3 naar rechts doet $\sqrt{5x}$ overgaan in $\sqrt{5(x-3)}$ ofwel $\sqrt{5x - 15}$.

En dan tenslotte de spiegeling t.o.v. de x-as. Spiegelen betekent dat waar de functie eerst positief is, hij na de spiegeling negatief wordt en omgekeerd worden negatieve functiewaarden na spiegeling positieve functiewaarden. Dit gegeven leggen we vast in de volgende regel:

Spiegelen t.o.v. de x-as betekent de functie qua teken laten omdraaien

In ons geval betekent dit dat de functie $\sqrt{5x - 15}$ overgaat in $-\sqrt{5x - 15}$. Dus de functie \sqrt{x} gaat na een versmalling van 5 maal t.o.v. de y-as, een horizontale verplaatsing van +3 en een spiegeling t.o.v. de x-as, over in de functie $f(x) = -\sqrt{5x - 15}$. Als je de volgorde van de manipulaties verandert, krijg je praktisch altijd een ander eindresultaat.

Voorbeeld 2: Gegeven de grafiek van de functie $y = \sqrt{x}$. Bepaal de functie $g(x)$ indien gegeven is dat de grafiek van $g(x)$ uit $f(x)$ ontstaat door achtereenvolgens:



- (a) de grafiek van $f(x)$ ten opzichte van de y-as 4 x zo breed te maken.
- (b) De nieuw ontstane functie 4 eenheden naar links verplaatsen.
- (c) En tot slot een spiegeling t.o.v. de Y-as uit te voeren.

Oplossing: vier maal zo breed maken : de variabele x vervangen $x/4$. Dan ontstaat de functie $y = \sqrt{x/4}$. Dan 4 eenheden naar links verplaatsen betekent overal x vervangen door $x + 4$. Dan ontstaat $y = \sqrt{(x+4)/4}$. Voor het spiegelen t.o.v. de y-as pas je toe:

Spiegelen t.o.v. de y-as betekent in het functievoorschrift x door $-x$ vervangen.

Dus in de functie $\sqrt{(x+4)/4}$ overal x door $-x$ vervangen. Het eindresultaat wordt dan: $\sqrt{(-x+4)/4}$

opgave 13: Ga in voorbeeld 1 : $y = \sqrt{x}$ eerst 3 eenheden naar rechts verschuiven, dan t.o.v. de y -as 5 x zo smal en tenslotte spiegelen t.o.v. de x -as. Bepaal de uiteindelijke formule van de functie .

opgave 14: Ga in voorbeeld 2 eerst spiegelen t.o.v. de y -as, dan 4 naar links en uiteindelijk de grafiek t.o.v. de y -as vier maal zo breed maken. Bepaal weer de formule van de functie die je uiteindelijk krijgt.

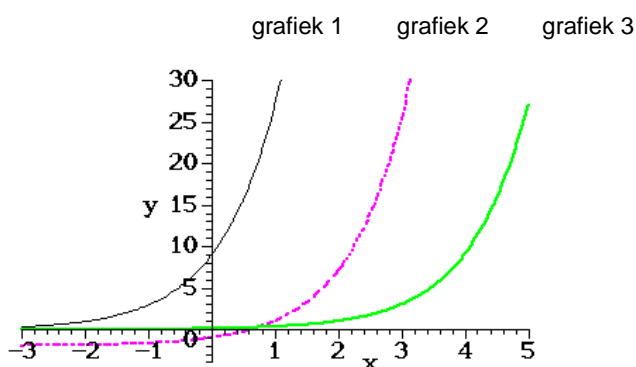
opgave 15: Ga in voorbeeld 2 eerst de grafiek 4 eenheden naar links, dan spiegelingen t.o.v. van de y -as en tot slot de grafiek t.o.v. de y -as vier maal zo breed maken. Bepaal weer de uiteindelijke formule.

opgave 16: Indien je drie verschillende manipulaties mag uitvoeren op een gegeven grafiek, op hoeveel manieren kan je dan door die drie manipulaties in wisselende volgorde uit te voeren tot de nieuwe gemanipuleerde grafiek komen ?

7.4 Het opstellen van een exponentiële functie

In dit onderdeel van module 7 moet je bij een bepaalde exponentiële functie een keuze maken tussen 3 gegeven grafieken. Je moet die grafiek kiezen, die hoort bij de gegeven functie. **Een goede methode is om een geschikte x-waarde te kiezen en dan de bijbehorende functiewaarde te berekenen.** Op basis van deze berekende functiewaarde kan je concluderen welke grafiek de juiste is. Dit zal geïllustreerd worden aan de hand van een aantal uitgewerkte voorbeelden.

VOORBEELD 1 : Gegeven is de functie $f(x) = 3^{x-2}$ met daarbij de volgende drie grafieken:

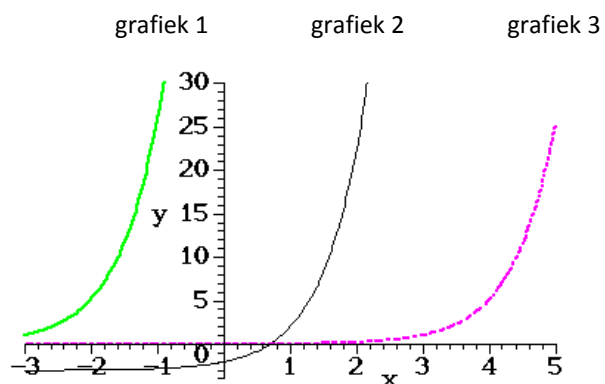


Welke van de drie grafieken 1, 2 en 3 is de juiste grafiek van de functie :

- ☐ De vette groene grafiek (grafiek 3)
- ☐ De dunne zwarte grafiek (grafiek 1)
- ☐ De gestippelde roze grafiek (grafiek 2)

Oplossing: de drie grafieken liggen vrij ver uit elkaar, dus is het makkelijk een geschikte waarde voor x te vinden. Eigenlijk kan je $x = 0$ nemen, of $x = 2$, of $x = 3$. Neem je $x = 0$, dan wordt $f(x) = 3^{-2} = 1/9$ en dat moet de groene grafiek zijn (grafiek 3). Neem je $x = 1$, dan wordt $f(x) = 1/3$: ook grafiek 3, en $x = 3$: $f(x) = 3$, ook grafiek 3.

VOORBEELD 2 : Gegeven is de functie $f(x) = 5^{x-3}$ met daarbij de volgende drie grafieken:



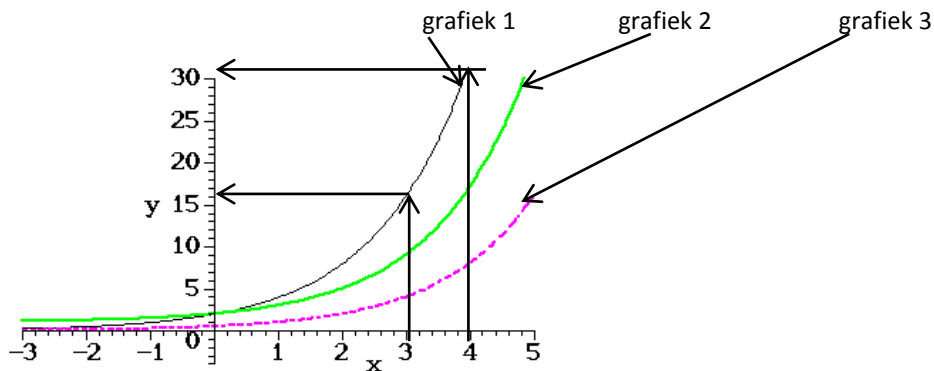
Welke van de drie grafieken is de juiste grafiek van de functie?

- ☐ De dunne zwarte (grafiek 2)

- ☐ De gestippelde roze (grafiek 3)
- ☐ De vette groene (grafiek 1)

Oplossing: de drie grafieken liggen ook bij deze opgave redelijk ver uit elkaar dus het moet niet al te moeilijk zijn om een geschikte waarde voor x te vinden om $f(x)$ te berekenen. Eigenlijk is $x = 0$ wel een handige waarde, of $x=1$.
 Neem je $x=0$, dan wordt $f(x) = 5^{-3} = 1/125$ en dat moet grafiek 3 zijn.
 Neem je $x=1$, dan wordt $f(x) = 1/25$ en dat leidt ook naar grafiek 3.
 Neem je $x=2$ dan wordt $f(x) = 5^{2-2} = 5^0 = 1$. Wederom komen we bij grafiek 3 uit.

VOORBEELD 3 : Gegeven is de functie $f(x) = 2^{x+1}$ met daarbij de volgende drie grafieken:



Welke van de drie is de grafiek van de functie?

- ☐ De gestippelde roze (grafiek 3)
- ☐ De vette groene (grafiek 2)
- ☐ De dunne zwarte (grafiek 1)

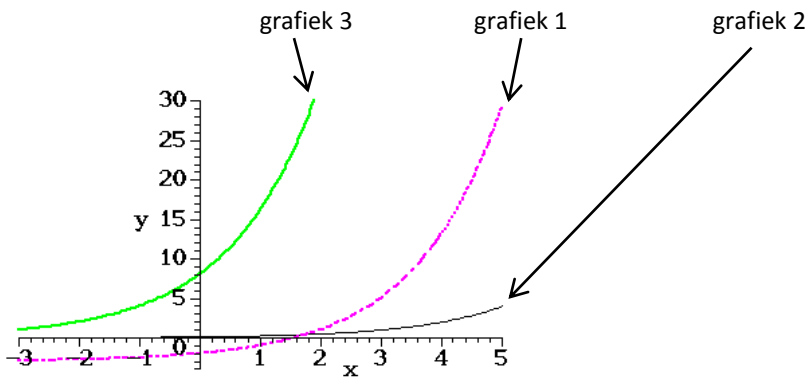
Oplossing:

De drie grafieken liggen links van de x -as vrij dicht bij elkaar, dus het is niet echt handig om in dit gebied een x -waarde te kiezen. Beter kan je aan de rechterzijde van de x -as een waarde nemen en $x = 3$ of $x = 4$ lijken dan erg meest geschikt. We kiezen eerst $x = 3$ en daarna $x = 4$.

Neem je $x=3$, dan wordt $f(x) = 2^{3+1} = 2^4 = 16$. En dat is duidelijk grafiek 1 (zie de pijlen in de grafiek)

Neem je $x=4$, dan wordt $f(x) = 2^{4+1} = 2^5 = 32$. En dat is ook weer duidelijk grafiek 1 (zie weer pijlen in grafiek)

opgave 17 Gegeven is de functie $f(x) = 2^{x-3}$ met daarbij de volgende drie grafieken:



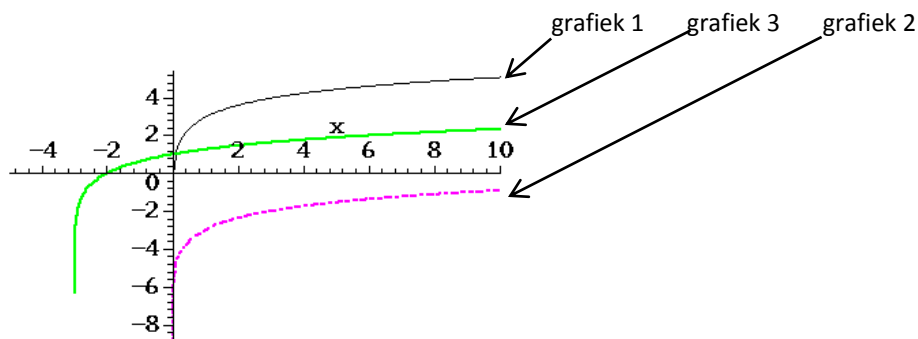
Welke van de drie is de grafiek van de functie?

- ☐ De gestippelde roze (grafiek 1)
- ☐ De dunne zwarte (grafiek 2)
- ☐ De vette groene (grafiek 3)

7.5 Het vinden van de juiste grafiek bij een gegeven logaritmische functie

In deze paragraaf wordt getoond hoe je bij een bepaalde logaritmische functie een keuze kunt maken tussen 3 gegeven grafieken. Je moet die grafiek kiezen, die hoort bij de gegeven functie. Net zoals in de vorige paragraaf is het ook hier een goede methode *om een geschikte x-waarde te kiezen en dan de bijbehorende functiewaarde te berekenen*. Op basis van deze berekende functiewaarde kan je concluderen welke grafiek de juiste is.

VOORBEELD 1 : Gegeven is de functie $f(x) = \log_3(x) - 3$ met daarbij de volgende drie grafieken:

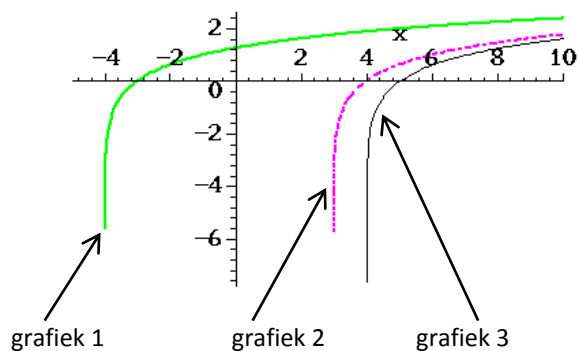


Welke van de drie is de grafiek van de functie?

- ☐ De dunne zwarte (grafiek 1)
- ☐ De gestippelde roze (grafiek 2)
- ☐ De vette groene (grafiek 3)

Oplossing: kies een geschikte x-waarde , b.v. $x = 3$, want dan liggen de drie grafieken voldoende uit elkaar. Substitutie van $x = 3$ in $f(x)$ geeft : $f(3) = \log_3(3) - 3 = 1 - 3 = -2$. Want $\log_3(3)$ is de macht waaroe je 3 moet verheffen om 3 te krijgen en die is 1. Dat betekent dat grafiek 2 de grafiek is die bij de gegeven functie hoort.

VOORBEELD 2 : Gegeven is de functie $f(x) = \log_4(x - 4)$ met daarbij de volgende drie grafieken :

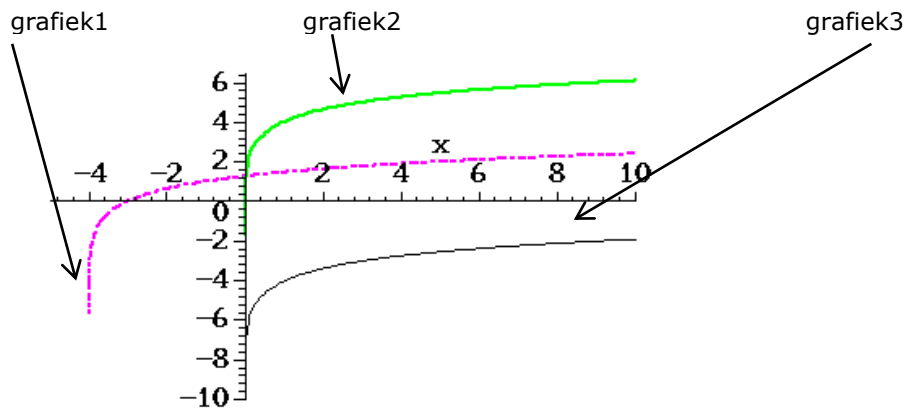


Welke van de drie is de grafiek van de functie?

- ☐ De dunne zwarte (grafiek 3)
- ☐ De gestippelde roze (grafiek 2)
- ☐ De vette groene (grafiek 1)

Oplossing: kies een geschikte x-waarde , b.v. $x = 4$, want dan liggen de drie grafieken voldoende uit elkaar. Substitutie van $x = 4$ in $f(x)$ geeft : $f(4) = \log_4(4 - 4) = \text{min oneindig}$. Want $\log_4(0)$ is de macht waartoe je 4 moet verheffen om 0 te krijgen en die is min oneindig. Dus grafiek 3 is de grafiek die bij de gegeven functie hoort

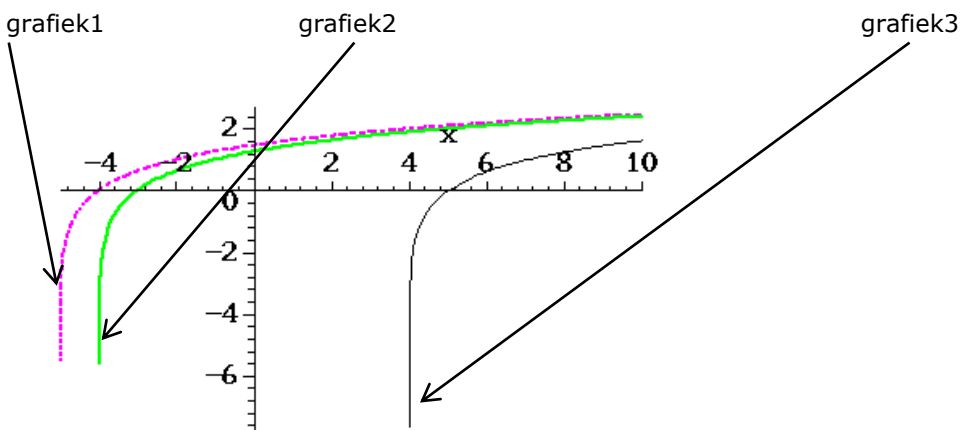
Opgave 18 : Gegeven is de functie $f(x) = \log_4(x) - 3$ met daarbij de volgende drie grafieken :



Welke van de drie is de grafiek van de functie?

- ☐ De dunne zwarte (grafiek 3)
- ☐ De gestippelde roze (grafiek 1)
- ☐ De vette groene (grafiek 2)

Opgave 19 : Gegeven is de functie $f(x) = \log_4(x + 4)$ met daarbij de volgende drie grafieken :



Welke van de drie is de grafiek van de functie?

- ☐ De dunne zwarte (grafiek 3)
- ☐ De gestippelde roze (grafiek 1)
- ☐ De vette groene (grafiek 2)

ANTWOORDEN van de opgaven in de paragrafen 7.1 t/m 7.5

Opgave 1 : $x = -1$; $x = -1$; $x = 9/8$; $x = 500/43$

Opgave 8 : $y = -2(x - 4)^2 + 8 = -2x^2 + 16x - 24$

Opgave 9 : $y = -5(x + 4)(x - 4) = -5x^2 + 80$

Opgave 10 : $y = 9x^2 - 6x + 1$

Opgave 11 : $y = x^2 - 2x - 1$

Opgave 12 : optie B

Opgave 13 : $y = -\sqrt{5x - 3}$

Opgave 14 : $y = \sqrt{-(1/4)x - 4}$

Opgave 15 : $y = \sqrt{-(1/4)x + 4}$

Opgave 16 : 6 manieren

Opgave 17 : grafiek 2

Opgave 18 : grafiek 3

Opgave 19 : grafiek 2